

작은 세상 그물얼개에서의 때맞음

홍현숙 · 최무영

서울대학교 물리학과, 서울 151-747

김범준

Department of Theoretical Physics, Umeå University, 901 87 Umeå, Sweden

본 연구에서는 작은 세상 그물얼개(small-world network)를 이루도록 분포하는 결합 떨개(coupled oscillator)들의 집단 때맞음(collective synchronization) 현상에 대하여 조사한다. 떨기수와 위상의 때맞음을 측정하는 질서 매개변수(order parameter)들을 도입하고, 동역학적 시뮬레이션(dynamic simulations)과 유한 크기 눈금 잡기(finite-size scaling)를 이용하여 분석한다. 계(system)에 적은 수의 지름길(shortcut)이 있어도 때맞음이 일어나는 것으로 관찰되었고, 되잇기 확률(rewiring probability) P 가 증가하면서 때맞음도 함께 잘 일어나며, $P \gtrsim 0.5$ 인 영역에서는 거의 같은 때맞음 정도를 보이는 것으로 관찰되었다. 이는 비교적 적은 수의 지름길만으로도 $P = 1$ 에 해당하는 마구잡이 그물얼개(random network)에서와 거의 같은 때맞음이 일어날 수 있음을 말해준다.

PACS numbers:

Keywords:

I. 이끄는 글

결합 비선형 떨개계는 물리, 생물, 화학 등의 다양한 계에서 나타나는 집단 때맞음 현상을 이해하는 데에 편리한 모형으로서 그동안 많은 관심을 받아 왔다 [1]. 집단 때맞음 현상에 관한 많은 연구들은 주로 d 차원 입방살창(cubic lattice)과 같이 국소적이면서 규칙적인 그물얼개(regular network), 또는 온곳 결합된 그물얼개(globally-coupled network)에서 행해졌다. 하지만 최근에는 자연에 존재하는 다양한 계가 규칙적인 그물얼개와 마구잡이 그물얼개 사이에 해당하는 작은 세상 그물얼개 [2]와 같은 기하학적 구조를 가질 수 있다는 것이 알려지면서 한층 주목을 받고 있다. 작은 세상 그물얼개는 대체로 두 가지 흥미로운 특성을 가지고 있다. 첫째로 규칙적인 그물얼개에서 보이는 특성으로서 무더기 이룸(clustering)이 잘 나타난다는 점이고, 둘째는 짧은 경로(short path length)를 가진다는 사실로 이는 마구잡이 그물얼개에서 나타나는 특성이다. 그동안 작은 세상 그물얼개에 관한 대부분의 연구들은 그물얼개 위에 놓여지는 계의 동역학적 측면보다는 그물얼개의 기하학적 구조로 인해 나타나는 성질들에 초점이 맞추어져 왔다. 이에 반해 최근에는 작은 세상 그물얼개에 놓여진 동역학계들에 대하여 몇몇 연구들이 이루어졌고 [3,4], 이러

한 연구들에서는 좀 더 빠른 정보의 전달, 좀 더 나은 계산 능력, 그리고 보다 더 강력한 때맞음 현상이 관찰되었다. 특히 작은 세상 그물얼개 구조를 이루는 떨개계에서 떨기수 때맞음(frequency synchronization) 현상이 조사되었고, 마구잡이로 되어온 연결(randomly rewired connection) 중에 전체 떨개 수에 비해 아주 적은 수의 지름길만 계에 더해져도 떨기수 때맞음이 일어나는 것으로 밝혀졌다 [3]. 여기서 전체적인 때맞음 현상으로 전이(transition)가 일어날 때 평균마당 계(mean-field system)의 성질을 지닐 가능성이 조심스럽게 언급되었으나, 그에 대한 정량적인 분석과 합당한 이해는 아직 이루어져 있지 않다. 예를 들어 유한한 결합의 세기에 대하여 긴 버림 질서(long-range order)가 나타나는 고비 되잇기 확률(critical rewiring probability)과 같은 양에 대한 조사는 거의 이루어지지 않았다.

본 논문에서는 되잇기 확률과 결합의 세기가 변해감에 따라 작은 세상 그물얼개에서의 때맞음 현상, 특히 되잇기가 떨기수와 위상의 때맞음에 미치는 영향들을 주로 조사하고 유한 크기 눈금잡기 이론(finite-size scaling theory)을 써서 다음의 사실들을 관찰하였다. (i) 위상 때맞음(phase synchronization)뿐만 아니라 떨기수 때맞음도 일차원의 규칙적인 살창에서는 나타나지 않는 현상인데, 작은 세상 그물얼개 구조에서는 아주 적은 수의

지름길을 도입하여도 때맞음이 일어난다. (ii) 위상 때맞음으로의 전이 현상은 쿠라모토 모형(Kuramoto model) [5]과 같은 평균마당 모형의 성질을 가진다.

II. 모형과 수치계산

이 연구에서 작은 세상 그물얼개는 참고 문헌 [2]에 따라 다음과 같이 만들었다. 우선 N 개의 꼭지점들(vertices) 사이에 서로작용 범위 k 의 한곳 이음(local connection)을 갖는 일차원의 규칙적인 그물얼개를 만든다. 이러한 한곳 이음들이 다 만들어지면 되잇기 확률 P 로 그 이음들 중 일부를 끊고 마구잡이로 선택한 꼭지점에 다시 연결한다. 이런 과정을 전체 그물얼개의 꼭지점들에 대해 모두 적용하면, N 이 충분히 클 때 그물얼개에 존재하게 된 지름길의 수는 NPk 로 주어진다. 이러한 방식으로 얻어진 작은 세상 그물얼개의 각 꼭지점에 떨개를 하나씩 놓으며, 두 개의 꼭지점을 연결하는 이음(link)은 두 떨개 사이의 결합을 의미한다. 꼭지점 i 에 놓여진 떨개의 상태를 위상 ϕ_i 로 나타내면, N 개의 떨개들로 이루어진 전체 계의 시간 변화를 기술하는 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{\phi}_i(t) + \frac{K}{2k} \sum_{j \in \Lambda_i} \sin(\phi_i - \phi_j) = \omega_i, \quad (1)$$

여기서 Λ_i 는 꼭지점 i 에 한곳 이음 또는 지름길로 연결되어 있는 꼭지점들의 집합을 뜻하며, K 는 꼭지점 당 평균 이음의 수에 대해서 적절히 틀맞추어진(normalized) 결합의 세기를 나타낸다. 또한 위의 식 오른쪽에서 ω_i 는 i 번째 떨개의 배내떨기수(intrinsic frequency)를 나타내는데, 이는 분포함수 $g(\omega)$ 에 따라 분포되어 있는 담금질한 마구잡이 변수들(quenched random variables)이다.

주어진 k 와 P 에 대해 이런 방법으로 만들어진 작은 세상 그물얼개에 존재하는 결합 떨개계에서 때맞음 현상을 여러 가지 결합의 세기에 따라 조사하였다. 편의상 서로작용 범위를 $k = 3$ 으로 택하였고, 배내떨기수들은 분산(variance) $\sigma = 1$ 인 가우스 분포(Gaussian distribution)를 따른다고 생각하였다 [6]. 이러한 경우에 혼의 방법(Heun's method) [7]을 써서 수치적으로 운동방정식 (1)을 적분하였다. 이 때 시간 간격 $\Delta t = 0.05$ 를 썼고 대체로 $N_t = 4 \times 10^3$ 시간 동안 적분하였으며, 처음 $N_t/2$ 시간동안 얻어진 자료는 버렸다. 특히 Δt 와 N_t 를 바꾸면서 얻어진 결과를 비교해서 더 이상 변화를 보이지 않음을 확인하였고, 계의 크기는 $N = 3200$ 까지 고려하였는데 각 크기에 대하여 100번의 독립적인 수행을

하였고 이에 대하여 평균을 택하였다. 떨개계의 집단적인 거동은 다음과 같이 정의되는 질서 맺음변수에 의하여 기술하는 것이 편리하다.

$$m \equiv \left[\left\langle \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \right| \right\rangle \right], \quad (2)$$

$$q \equiv \left[\left\langle \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j}^N e^{-c(\phi_i - \phi_j)^2} \right\rangle \right], \quad (3)$$

여기서 $\langle \dots \rangle$ 와 $[\dots]$ 는 각각 시간에 대한 평균과 그물얼개에 대한 평균을 나타내며, c 는 충분히 큰 수이다. 떨기수의 분해능(resolution)은 $(N_t \Delta t)^{-1}$ 로 주어지므로 떨기수의 차이가 $(N_t \Delta t)^{-1}$ 보다 작은 두 떨개는 서로 같은 떨기수를 갖는 것으로 간주되어야 한다. 식 (3)의 떨기수 질서 맺음변수 q 는 c 에 민감하게 의존하지 않음을 확인하였고, 이 논문에서는 $c = 10^6$ 으로 택하였다. 떨기수 때맞음은 또한 질서 맺음변수를 $r \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} (N_s/N)$ 로 정의해서 기술할 수도 있다. 이 식에서 N_s 는 같은 떨기수를 지닌 가장 큰 떨개 무더기를 구성하고 있는 떨개들의 수를 말하는데, 비교를 위해 이러한 정의식도 조사한 결과 식 (3)에서의 질서 맺음변수와 본질적인 차이가 없음을 확인하였다 [8].

III. 결과와 논의

그림 1과 2는 몇 가지 값으로 되잇기 확률을 주었을 때 위상 질서 맺음변수(m)와 떨기수 질서 맺음변수(q)의 결합세기에 대한 거동을 보여주고 있다. 결합의 세기가 약할 경우에($K \rightarrow 0$) 떨개들의 위상은 $[0, 2\pi]$ 구간에서 균일하게 분포되어 있고 이로 인하여 위상의 질서 맺음 변수는 $m = \mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ 이 되어서 거시적 결맞음(macroscopic coherence)이 없게 된다. 반대로 결합의 세기가 충분히 강하면($K \rightarrow \infty$) 모든 떨개들의 위상이 때맞게 되고, 그물얼개의 세부 구조와는 관계없이 위상 맺음변수가 $m = 1$ 로 주어지며 따라서 떨기수의 질서 맺음변수도 $q = 1$ 이 된다 [9]. 그림 1과 2로부터 알 수 있는 중요한 사실은 떨기수 뿐만 아니라 위상의 때맞음도 되잇기 확률 P 에 강하게 의존한다는 사실이다. 특히 그물얼개에 지름길이 없으면($P = 0$) 두 가지 모두 때맞음 현상을 보이지 않는데, 이는 일차원 계에 대해 이미 알려져 있는 결과와 일치한다 [8]. 그러나 그물얼개의 크기, 곧 전체 떨개 수에 비해 아주 적은 수의 지름길이라도 도입되어지면, 계의 동역학은 극적으로 변화해서 위상 및 떨기수의 때맞음이 나타나게 된다. [이는 그

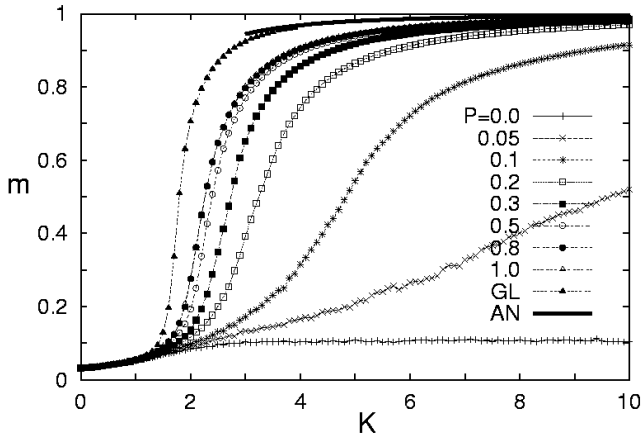


그림 1. 크기 $N = 800$ 의 작은 세상 그물얼개에서 위상 때맞음의 질서 매움변수 m 의 결합의 세기 K 에 따른 거동을 되잇기 확률 P 의 여러 값에 따라 보여준다. 비교를 위하여, 수치계산으로부터 얻어진 자료와 온곳결합 그물얼개에 대하여 이미 알려져 있는 결과[“GL”로 표시]를 함께 제시하고 있으며 또한 해석적인 결과[“AN”으로 표시]도 제시되어 있다. 표준편차(standard deviation)에 의하여 얻어지는 오차 막대(error bar)는 각 자료를 나타내는 기호(symbol) 정도의 크기이고, 선은 단순히 길잡이 선(guide line)을 나타낸다. 0이 아닌 모든 P 값에서 위상 때맞음이 나타나는 것이 보인다.

림 1과 2에서 $P = 0$ 인 경우와 $P = 0.05$ 인 경우를 비교해 보면 알 수 있다. 그림 1에서 알 수 있는 또 다른 흥미로운 사실은 P 가 증가함에 따라 $m(K)$ 로 측정되는 위상 때맞음은 $P > P_m \approx 0.5$ 일 때 더 이상 변화를 거의 보이지 않는다는 사실이다. 이는 비교적 적은 수의 지름길($P \approx 0.5$)에 의해 $P = 1.0$ 에 해당하는 위상 때맞음을 얻을 수 있다는 사실을 암시해 주고 있으며, 지름길을 도입하는데 높은 비용이 들어가는 현실의 그물얼개 계에서 실제적인 중요성을 가질 수 있다. 곧 경제적인 관점에서 보면, 온곳 결맞음(global coherence)을 비교적 적은 양의 자원(resources)으로 얻을 수 있는 $P \approx P_m$ 의 작은 세상 그물얼개가 현실적으로 적절하다고 할 수 있다. 떨기수의 질서 매움변수 q 를 고찰하면 되잇기 확률 P 가 작은 경우에 대하여 유한 크기 효과(finite-size effect)가 다소 크므로 확인이 어렵긴 하지만 비슷한 거동이 기대된다. 비교하기 위하여, 온곳결합 그물얼개에서의 때맞음 거동이 그림 1과 2에 제시되어 있고, 결합의 세기가 클 때 얻어진 해석적인 결과 $m \approx 1 - \sigma^2/2K^2$ [10]와 잘 일치함을 볼 수 있다. [그림 1에서 “AN”으로 이름 붙여진 굵은 선이 해석적인 결과를 나타내고 있다.] 이름의 수가 작은 세상 그물얼개에서는 $O(N)$ 이지만, 온곳결합 그물얼개에서는 $O(N^2)$ 이라는 것을 감안하면 작은 세상 그물얼개에서 위상 때맞음을 주는 고비 결합

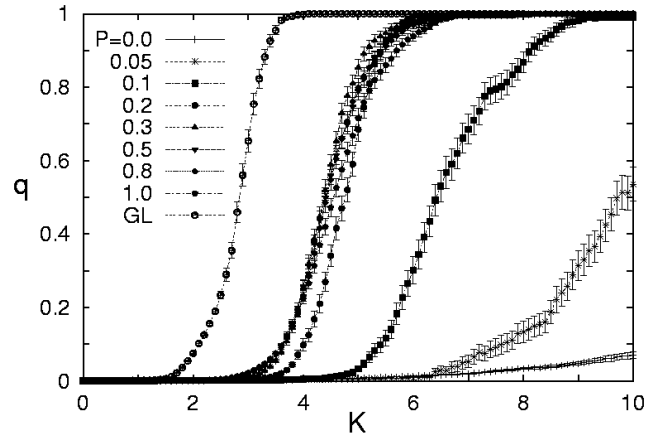


그림 2. 크기 $N = 800$ 의 작은 세상 그물얼개에서 떨기수 때맞음의 질서 매움변수 q 의 K 에 따른 거동을 되잇기 확률 P 의 여러 값에 따라 보여주고 있다. 온곳결합 그물얼개의 결과도 함께 나타내었으며, 앞에서와 마찬가지로 0이 아닌 모든 P 값에서 떨기수 때맞음이 나타나는 것이 보인다. 오차막대(error bar)를 표준편차(standard deviation)로 얻으면 역시 각 자료를 나타내는 기호 정도의 크기이고, 선은 단순히 길잡이이다.

의 세기는 온곳결합 그물얼개에서의 고비 결합의 세기 $K_c = 2/\pi g(0) \approx 1.60$ [배내떨기수의 분포함수 $g(\omega)$ 가 분산이 1인 가우스 분포일 때] [5] 보다 훨씬 크다는 사실을 짐작할 수 있으며, 그림 1과 2는 그러한 특성들을 잘 나타낸다. 더욱이 온곳결합 그물얼개와 작은 세상 그물얼개가 정성적으로 같은 때맞음 현상을 보인다는 사실은 주목할 만한 일이라고 하겠다. 이는 $O(N)$ 의 이음만 가지고도 $O(N^2)$ 의 이음과 비슷하게 강력한 때맞음을 얻을 수 있다는 것을 의미한다.

때안맞음-때맞음 전이가 일어나는 고비 결합의 세기를 정확하게 결정하기 위해서는 유한 크기 효과를 주의 깊게 고려해야 한다. 이 논문에서는 위상 질서 매움변수의 유한 크기 눈금잡기를 조사해서 고비값 K_c 를 결정하였고, 그 주변에서 전이의 성질을 조사하였다. 열역학적 극한(thermodynamic limit)에서 위상의 질서 매움변수는 고비지수 β 를 가지고 다음과 같은 고비 거동을 보인다.

$$m \sim (K - K_c)^\beta. \quad (4)$$

한편 유한한 크기를 지닌 계에서는 두 개의 눈금잡기 인수(scaling argument) ξ 와 ζ 의 함수 f 에 대해 $m = (K - K_c)^\beta f(\xi/N, \zeta/N)$ 형태로 주어지는 눈금잡기를 생각할 수 있다. 이 때 상관거리 ξ 는 K_c 에서 발산하며 $\zeta (\equiv 1/kP)$ 는 작은 세상 그물얼개에서 지름길로 이어진 꼭지점들의 전형적인 거리를 나타낸다 [11]. 일반적

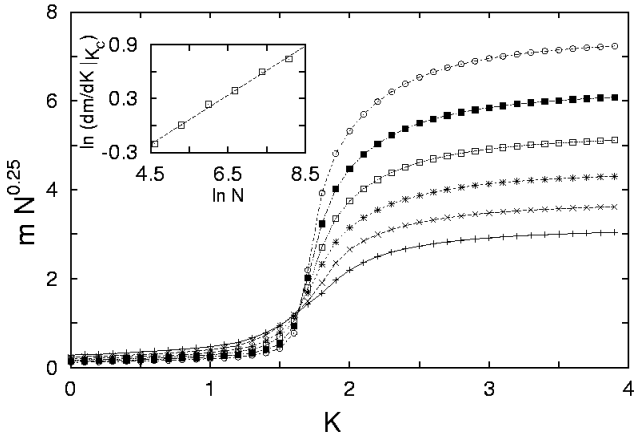


그림 3. 온곳결합 그물얼개에서 위상 질서 멱음변수 m 이 고비지수 $\beta/\bar{\nu} = 0.25$ 와 함께 결합의 세기 K 의 함수로 $mN^{\beta/\bar{\nu}}$ 에 따라 그려져 있다. 그물얼개의 크기는 아래쪽 곡선에서부터 위쪽으로 $N = 100, 200, 400, 800, 1600, 3200$ 이며, $K_c \approx 1.61$ 에서 모든 곡선이 잘 모이게 됨을 보여주고 있다. 작은 그림: 식 (7)로부터 $(1-\beta)/\bar{\nu} \approx 0.27$ 이 얻어지며, $\beta/\bar{\nu} \approx 0.25$ 와 함께 $\beta \approx 0.48$ 과 $\bar{\nu} \approx 1.92$ 를 얻게 된다.

으로 우리는 크기가 ζ 보다 훨씬 큰 계에 관심을 가지므로 위의 눈금잡기 함수 $f(\xi/N, \zeta/N)$ 를 $f(\xi/N, 0)$ 로 어렵하고, 이에 따라 질서 멱음변수의 눈금잡기 형태를

$$m = N^{-\beta/\bar{\nu}} F\left((K - K_c)N^{1/\bar{\nu}}\right) \quad (5)$$

로 쓰자. 여기서 고비지수 $\bar{\nu}$ 는 상관 부피(correlation volume) ξ_V 가 K_c 에서 발산하는 거동을 기술한다 [12,13].

$$\xi_V \sim |K - K_c|^{-\bar{\nu}} \quad (6)$$

$K = K_c$ 에서 식 (5)에 있는 함수 F 는 N 에 무관한 값을 가지므로 표준의 유한 크기 분석 (standard finite-size analysis)을 써서 고비값 K_c 를 결정할 수 있다. 구체적으로 $mN^{\beta/\bar{\nu}}$ 을 K 에 대하여 여러 크기에 따라 그리면, K_c 에서 모든 곡선이 교차하게 되도록 $\beta/\bar{\nu}$ 를 결정할 수 있다. 이같이 해서 $\beta/\bar{\nu}$ 와 K_c 가 결정되면

$$\ln \left[\frac{dm}{dK} \right]_{K_c} = \frac{1-\beta}{\bar{\nu}} \ln N + \text{const} \quad (7)$$

를 이용하여 물때 $(1-\beta)/\bar{\nu}$ 를 얻고, 앞서서 얻은 $\beta/\bar{\nu}$ 로부터 β 및 $\bar{\nu}$ 의 값을 결정한다.

그림 3은 식 (5)에 있는 유한 크기 눈금잡기를 이용하고 $\beta/\bar{\nu}$ 의 값을 바꾸어 가면서 온곳결합 그물얼개의 고비값 K_c 를 결정하는 것을 보여주고 있다. 위의 그림에서 $\beta/\bar{\nu} \approx 0.25$ 일 때 사립점 $K_c \approx 1.61$ 에서 곡선들이 잘 모임을 알 수 있고, 이 결과는 해석적인 결과 $K_c = 2/\pi g(0) \approx 1.60$ [5]와 아주 잘 일치한다. 그림 3 안의 작은

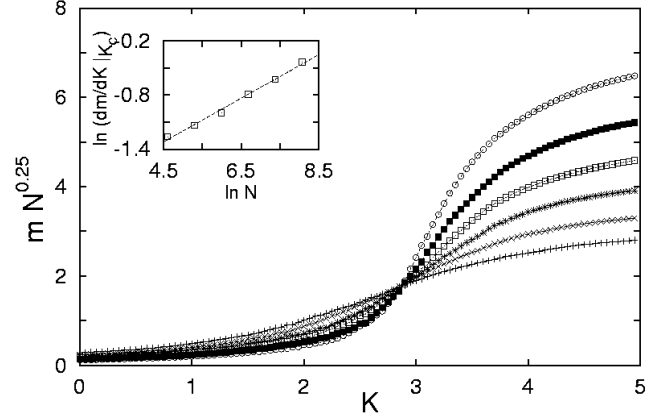


그림 4. 되잇기 확률 $P = 0.2$ 인 작은 세상 그물얼개에서 위상 때맞음 질서 멱음변수 m 이 고비지수 $\beta/\bar{\nu} = 0.25$ 를 가지고 $mN^{\beta/\bar{\nu}}$ 가 K 의 함수로 그려져 있으며 $K_c \approx 2.88$ 에서 모든 곡선이 모이게 됨을 보여주고 있다. [각 곡선에서 자료를 나타내는 기호는 그물얼개의 크기가 아래에서 위쪽으로 가면서 $N = 100, 200, 400, 800, 1600, 3200$ 에 해당한다]. 작은 그림: 물때로부터 $(1-\beta)/\bar{\nu} \approx 0.24$ 를 얻을 수 있다. 그림 3에서와 비슷한 분석 방법을 통해 같은 평균마당 지수(mean-field exponents) $\beta \approx 0.5$ 및 $\bar{\nu} \approx 2.0$ 가 얻어졌다.

그림은 식 (7)에 대하여 최소 제곱 꼭맞춤법(least-square fit)을 써서 $(1-\beta)/\bar{\nu} \approx 0.27$ 을 얻고 $\beta/\bar{\nu} \approx 0.25$ 와 함께 $\beta \approx 0.48$ 과 $\bar{\nu} \approx 1.92$ 를 얻음을 보여주고 있다. 이러한 결과는 온곳결합 그물얼개가 $\beta = 1/2$ 과 $\nu = 1/2$ [5]을 주는 평균마당 계임을 보여주고 있으며, 특히 $\bar{\nu}$ 가 2에 가까운 값으로 얻어진 사실은 때맞음 전이가 일어나는 윗 고비 차원(upper critical dimension)이 4라는 것을 말해주고 있다 [12]. 마찬가지로 작은 세상 그물얼개에서의 전이에 대한 거동을 조사할 수 있다. 그림 4에 보인 것은 되잇기 확률 $P = 0.2$ 인 경우에 작은 세상 그물얼개의 고비 결합의 세기와 고비지수를 결정하는 과정을 보여주고 있다. 그림 3에서와 같은 분석을 통하여 $K_c \approx 2.88$ 을 얻고 또한 고비지수 $\beta \approx 0.51$ 과 $\bar{\nu} \approx 2.04$ 를 얻었는데, 이들은 본질적으로 온곳결합 그물얼개에서의 값들과 같다. 따라서 $O(N)$ 의 이음을 가진 작은 세상 그물얼개에서 결합 떨개들은 훨씬 더 많은 $O(N^2)$ 의 이음을 지닌 온곳결합 그물얼개에서와 마찬가지로 평균마당 때맞음 전이를 보인다고 결론지을 수 있다. 그림 5는 K 와 P 로 주어진 평면에서의 상그림(phase diagram)을 보여주고 있다. 때맞음 상(S)과 때안맞음 상(D)을 구분 짓는 상 경계선(phase boundary)의 자료는 위에서 기술한 유한 크기 눈금잡기 분석으로부터 얻어졌으며, 전이는 다루어진 모든 P 값에 대하여 평균마당 유형을 가진다는 결과가 얻어졌다. 흥미롭게도 그림 5에서 상 경계선은 식

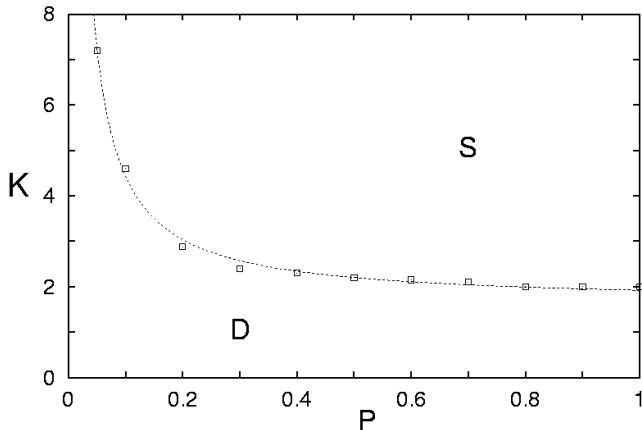


그림 5. 작은 세상 그물얼개에서 결합 떨개계의 상 그림. 상 경계선의 자료는 식 (5)에 주어진 질서 매움변수들의 유한 크기 눈금잡기로부터 얻어졌다. 때맞음 상(S)과 때안맞음 상(D)을 구분하는 상 경계선은 점선으로 표시되어 있으며 $K_c = 1.64(4) + 0.28(1)P^{-1}$ 로 잘 나타내어진다.

$K_c = 1.64(4) + 0.28(1)P^{-1}$ 로 잘 나타내어진다. 이 식은 $P \rightarrow \infty$ 에서 $K_c = 1.64(4)$ 를 예측하고 있는데, 이는 그림 3에서 볼 수 있는 $K_c \approx 1.61$ 값과 잘 일치하고, 또한 온곳결합 그물얼개에 대하여 알려져 있는 해석적인 결과 $K_c = 2/\pi g(0) \approx 1.60$ 와도 잘 일치한다. 이러한 결과는 먼버렁 이음(long-ranged connection)의 수가 $O(N^2)$ 인 온곳결합 그물얼개의 경우가 $P \approx N$ 에 해당한다는 사실로부터도 짐작할 수 있다. 주어진 자료를 가지고 상 경계선의 형태를 직접 바깥 채워서 추정하면 모든 $P \neq 0$ 에서 K_c 가 유한하다는 것을 알 수 있다. 이러한 논의의 타당성을 가정하면, 작은 세상 그물얼개에서 P 가 0만 아니면 유한한 결합의 세기에서 때맞음이 나타난다고 기대할 수 있겠다. 이러한 결과는 작은 세상 현상에 관한 기존의 연구 결과들과 밀접한 유사성이 있다. 곧, 작은 세상 그물얼개의 특징적인 경로(characteristic path length)는 $P = 0$ 일 때와 $P \neq 0$ 일 때 상당히 다르며 [14], 이는 작은 세상 전이와 질서-무질서 전이가 밀접하게 관련되어 있다는 사실을 뒷받침해주고 있다 [15].

한편, 떨기수 질서 매움변수 q 는 계의 크기 N 이 커짐에 따라, 모양을 유지하면서 결합의 세기 K 가 큰 쪽으로 옮겨가다가 결국 수렴하는 거동으로 관찰이 되어진다. 이러한 독특한 양상은 P 가 작은 경우에 더 뚜렷하게 보이는데, 이 때문에 표준의 유한 크기 눈금잡기 분석이 부적당하게 되고, 떨기수의 때맞음에 대한 고비 결합의 세기를 정확하게 결정하는 것이 다소 어렵게 된다. 특히 모든 되잇기 확률 P 에 대하여 위상 때맞음과 떨기수 때맞음이 같은 결합의 세기에서 동시에 일어나는지는 아

직 확실하지 않다. 다소 제한된 자료로 보면 P 가 작은 경우에 떨기수 때맞음이 더 작은 결합의 세기에서 나타나는 것으로 보이고, 이는 결합의 세기 K 가 아주 크거나 작지 않은 중간 값을 가질 때 위상 때맞음 없이 떨기수 때맞음이 일어날 가능성을 제시해주고 있다. 그러나 확실한 결과를 위해서는 더 많은 수치계산이 필요하며, 이는 다음의 과제로 남겨둔다.

IV. 요약

이 논문에서는 작은 세상 그물얼개 구조를 이루는 결합 떨개들의 집단 때맞음 현상에 대한 연구 결과를 보고 하였다. 위상과 떨기수의 때맞음은 되잇기 확률 P 에 강하게 의존하며, 특히 $P = 0$ 에서는 나타나지 않는 때맞음이 이 논문에서 고려한 0이 아닌 모든 P 의 값에 대하여 나타났다. 비록 $P = 0$ 근처에서 확정적인 결과를 얻기 위해서는 더 많은 수치계산을 해야 하지만, 유한한 결합의 세기에서 때맞음이 나타나기 시작하는 고비 되잇기 확률 P_c 가 있음은 명백하게 시사하고 있다. 위상의 때맞음 전이에 대한 상 경계선은 위상 질서 매움변수의 유한 크기 눈금잡기에 대한 분석을 통해서 얻어졌다. 상 그림에서 알 수 있듯이, $P \gtrsim 0.5$ 에서 때맞음의 특성이 거의 변하지 않는 것이 관찰되었고, 이러한 거동은 실용적인 관점에서 볼 때 그물얼개를 구축하는데 유용한 함축적인 의미를 담고 있다. 그물얼개 계(network system)에서는 대체로 먼버렁 이음(long-range connection)이 한곳이 음보다 훨씬 많은 비용이 들기 때문에, 수렴이 시작되는 P 값을 찾아서 적은 자원을 이용하여 온곳결합 거동을 얻어낸다는 것은 매우 바람직한 일이라 하겠다. 마지막으로, 되잇기 확률 P 가 작을 때, 결합의 세기를 변화시키면 떨기수와 위상의 순차적인 전이의 가능성도 제시되었으며, 자세한 조사는 다음의 연구과제로 남겨두었다.

감사의 글

본 연구는 일부 교육부의 BK21 프로그램 및 스웨덴의 Natural Research Council Contract No. F 5102-659/2001의 지원을 받았다.

참고 문헌

[*] 현주소: 고등과학원 물리학부, 서울 130-012

- [1] 참고문헌들로서 A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, New York, 1980); Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984) 등이 있다.
- [2] D.J. Watts and S.H. Strogatz, *Nature* (London) **393**, 440 (1998); R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, *ibid.* **401**, 130 (1999); A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999); M.E.J. Newman, *J. Stat. Phys.* **101**, 819 (2000); S.H. Strogatz, *Nature* (London) **410**, 268 (2001); R. Albert and A.-L. Barabási, e-print cond-mat/0106096; S.N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, e-print cond-mat/0106144.
- [3] D.J. Watts, *Small Worlds* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999)
- [4] L.F. Lago-Fernández, R. Huerta, F. Corbacho, and J.A. Sigüenza, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2758 (2000).
- [5] Y. Kuramoto, in *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, edited by H. Araki (Springer-Verlag, New York, 1975); Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984); Y. Kuramoto and I. Nishikawa, *J. Stat. Phys.* **49**, 569 (1987); H. Daido, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 622 (1987); *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1073 (1992).
- [6] 다른 형태의 분포를 고려해도 결과에는 정성적인 차이가 없다.
- [7] 예를 들어 R.L. Burden and J.D. Faires, *Numerical Analysis* (Brooks/Cole, Pacific Grove, 1997), p. 280.
- [8] H. Sakaguchi, S. Shinomoto, and Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 1005 (1987).
- [9] 일반적으로 위상 때맞음($m = 1$)은 떨기수 때맞음($q = 1$)을 전제하고 있으며, 그 역은 성립하지 않는다.
- [10] H. Hong, G.S. Jeon, and M.Y. Choi, *Phys. Rev. E* (계재 예정).
- [11] M.E.J. Newman and D.J. Watts, *Phys. Rev. E* **60**, 7332 (1999).
- [12] d 차원에서는 $\xi \sim |K - K_c|^{-\nu}$ 로 발산하는 상관거리에 대해 $\xi_V \sim \xi^d$ 를 얻으며, 이는 $\bar{\nu} = \nu d$ 의 관계를 의미한다. 특히 평균마당 계($\nu = 1/2$)에서는 윗고비 차원 d_c 에 대해 $\bar{\nu} = d_c/2$ 가 성립한다.
- [13] R. Botet, R. Jullien, and P. Pfeuty, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 478 (1982).
- [14] M.E.J. Newman and D.J. Watts, *Phys. Lett. A* **263**, 341 (1999); M.A. de Menezes, C.F. Moukarzel, and T.J.P. Penna, *Europhys. Lett.* **50**, 574 (2000).
- [15] B.J. Kim, H. Hong, P. Holme, G.S. Jeon, P. Minnhagen, and M.Y. Choi, *Phys. Rev. E* **64**, 056135 (2001).

Collective synchronization on small-world networks

H. HONG* and M.Y. CHOI

Department of Physics, Seoul National University, Seoul 151-747, Korea

Beom Jun KIM

Department of Theoretical Physics, Umeå University, 901 87 Umeå, Sweden

We investigate collective synchronization in a system of coupled oscillators on small-world networks. The order parameters which measure synchronization of phases and frequencies are introduced and analyzed by means of dynamic simulations and finite-size scaling. Phase synchronization is observed to emerge in the presence of even a tiny fraction P of shortcuts and to display saturated behavior for $P \gtrsim 0.5$. This indicates that the same synchronizability as the random network ($P = 1$) can be achieved with relatively small number of shortcuts.

PACS numbers:

Keywords: